Zur Theorie der Zapfenreibung.

Von

Th. Reye, Polytechniker zu Zürich.

(Hierzu Fig. 12—23 auf Taf. 15.)

Eine wichtige, bei der Zapfenreibung auftretende, Erscheinung ist die, daß die Reibungsarbeit neuer Zapfen bei deren Gebrauch sich stetig vermindert, bis sie nach einiger Zeit ihr Minimum erreicht, oder bis, wie man sagt, die Zapfen „eingelaufen" sind. Um diese bedeutende Verminderung der passiven Widerstände schnell herbeizuführen, läßt man daher neue Maschinen häufig einige Zeit leer laufen. — Vorliegender Aufsatz nun hat den Zweck, dieses Einlaufen der Zapfen zu erklären, und die Verminderung der Reibungsarbeit durch Rechnung zu bestimmen. Er enthält eine Theorie eingelaufener Zapfen, deren Vergleich mit der älteren Theorie neuer Zapfen zu recht interessanten Resultaten führt.

Die Theorie der Zapfenreibung pflegte bisher neue und ausgelaufene Zapfen zu unterscheiden. Die letzteren liegen der Voraussetzung nach nur in wenigen Punkten, etwa in einer Linie, im Lager auf; bei neuen Zapfen dagegen ist nach der Hypothese von Weisbach und Anderen die Berührung zwischen Zapfen und Lager in allen Punkten der reibenden Flächen gleich innig, der normale Druck per Quadrateinheit jener Flächen überall gleich groß*). Nach einer dieser beiden Annahmen sind bisher die Reibungsarbeiten der Zapfen immer berechnet worden.

Offenbar setzt die Theorie ausgelaufener Zapfen die Zapfen in einem sehr schlechten Zustande voraus. Die Lage der Zapfen und Wellen ist alsdann stets etwas veränderlich, schädliche Stöße sind nicht zu vermeiden. Die Praktiker streben daher, diesen Zustand durch richtige Vertheilung oder Balancirung der rotirenden Massen, sowie durch bewegliche Lagertheile (Lagerdeckel und Pfannen) zu verhüten, und wirklich möchten ausgelaufene Zapfen heute eine große Seltenheit sein. Die Theorie ausgelaufener Zapfen hat daher für die Praxis nur in sofern Werth, als sie sehr brauchbare, einfache Näherungsformeln für die Reibungsarbeit liefert.

Die Theorie neuer Zapfen ist gleichfalls nur für einen bestimmten, kurze Zeit andauernden Zustand der Zapfen anzuwenden; denn neue Zapfen verlieren ihre Eigenschaft, neu zu sein, sobald sie einige Zeit im Lager laufen. Zapfen und Lager nutzen sich bekanntlich ab, und zwar bei überall gleicher Normalpressung an denjenigen Punkten der Reibungsflächen am stärksten, deren relative Geschwindigkeit die größte ist. Die von der Drehungsaxe entfernteren reibenden Theile (man denke z. B. an den ebenflächigen Stützzapfen, Fig. 12) unterliegen also, so lange Weisbach's Hypothese Geltung hat, einer größeren Abnutzung, als die näher gelegenen. Obwohl nun vermöge der Elasticität von Zapfen und Lager die Berührung auch an den schneller sich bewegenden Punkten nicht aufhört, so wird doch mit der Zeit der normale Druck an diesen Punkten kleiner werden müssen, als an den langsamer sich bewegenden. Hierdurch findet auch die beim Einlaufen eintretende Verminderung der Reibungsarbeit eine einfache Erklärung. Denn wenn der Zapfendruck sich so auf die reibende Fläche vertheilt, daß in allen ihren Punkten der gleiche Normaldruck entsteht, so wird augenscheinlich mehr Reibungsarbeit verursacht, als wenn die langsam gehenden, reibenden Flächenelemente per Quadrateinheit einen größeren Theil jenes Druckes aufnehmen, als die schneller bewegten. — Bisher erklärte die Theorie jene Erscheinung dadurch, daß die Reibungsflächen sich bei der Bewegung besser abschleifen, als durch Menschenhand geschehen kann, daß also nicht die Vertheilung des Druckes, sondern der Reibungs-Coefficient sich ändere beim Einlaufen.

Bei allen Zapfen mit krummen Reibungsflächen kommt noch eine andere Ursache hinzu, weshalb die Normalpressung nicht überall gleich bleiben kann. Wir wollen dieses

*) Diese Hypothese, welche ich im Folgenden als Weisbach'sche bezeichnen werde, tritt freilich meistens in einer etwas anderen Form auf. Sie heißt alsdann: Der Zapfendruck vertheilt sich gleichförmig auf eine zu ihm normale Projection der Reibungsfläche." Allein die eine Ausdrucksweise folgt aus der anderen, wie unten (pag. 239) bewiesen.

beispielsweise am cylindrischen Tragzapfen*) anschaulich machen, dessen Reibungsfläche in allen ihren Punkten die gleiche Geschwindigkeit besitzt, also auch überall die gleiche Abnutzung erleiden muß, so lange der Normaldruck in allen Punkten derselbe ist. Diese constante Abnutzung findet aber Statt in Richtungen, die überall zu den Reibungsflächen normal sind. Wenn also die Normalpressung in den verschiedenen Punkten dieser Flächen sich nicht änderte, so würde die cylindrische Reibungsfläche des Zapfens einen kleineren, die des Lagers einen größeren Durchmesser erhalten, die allseitige Berührung also aufhören. Letzteres kann jedoch unmöglich geschehen, ohne daß die Normalpressung bis zu Null abnimmt.

Aus diesem Allen geht hervor, daß Weisbach's Hypothese, die bisher auf alle nicht ausgelaufenen Zapfen angewendet wurde, nur für wirklich neue Geltung haben kann, d. h. für solche Zapfen, die sich noch gar nicht abgenutzt haben, und bei denen die Reibungsflächen von Zapfen und Lager auch ohne Mitwirkung des Zapfendrucks und der Elasticität congruent zusammenfallen. Sie kann nicht mehr gültig sein für Zapfen, die bereits einige Zeit gelaufen haben; für diese, welche ich „eingelaufene Zapfen" nennen will, muß eine neue Hypothese aufgestellt werden. Nur eine einzige, wenig angewendete, Zapfenform, nämlich der nach Schiele's Antifrictions-Curve (der Traktoria) gebildete Zapfen, unterliegt, wie spätere Rechnungen ergeben, ungeachtet der Abnutzung stets der Weisbach'schen Hypothese aus unten entwickelten Gründen.

Bei Aufstellung meiner Theorie eingelaufener Zapfen lege ich den allgemein anerkannten Erfahrungssatz zu Grunde:

„Unter normalen Verhältnissen ist die Reibung von zwei sich ebenflächig berührenden Körpern dem gegenseitigen senkrechten Druck ihrer Berührungsflächen proportional." Die Arbeit dieser Reibung verhält sich also für zwei an einander sich reibende Flächen-Elemente, wie das Produkt aus ihrer relativen Geschwindigkeit in jene senkrechte Pressung. Da die Form und Winkelgeschwindigkeit der Zapfen als bekannt vorausgesetzt werden darf, so können wir die relative Geschwindigkeit jedes Flächen-Elementes gegen das ruhende Lager leicht berechnen. Ebenso ist der totale Zapfendruck als bekannt anzusehen. Unsere Aufgabe läuft daher auf die Frage hinaus: „Wie vertheilt sich dieser Zapfendruck auf die gesammte Reibungsfläche?" indem durch deren Beantwortung sämmtliche Elemente zur Berechnung der Reibungsarbeit gegeben sind. Wir wenden uns zur Entscheidung dieser Frage an die Erfahrung.

*) Der Einfachheit wegen nenne ich mit Reuleaux Stützzapfen solche, in deren Axenrichtung, Tragzapfen solche, zu deren Axenrichtung normal der Zapfendruck wirksam ist.

Die durch Reibung verzehrte mechanische Arbeit wird, der Erfahrung zufolge, auf sehr verschiedene Weise verwendet und fortgeleitet. Ein bedeutender Theil derselben verursacht in den reibenden Körpern jene lebendige Kraft, welche theils in Molecular-Schwingungen als Wärme, theils in heftigem Zittern, jenen an Wellen so häufig beobachteten Erschütterungen, sich fühlbar macht und in benachbarte Körper, in Luft, Wände und Fußboden, entweicht. Ein anderer Theil wird zur Ueberwindung der Cohäsionskraft der Molecüle, zum Abreißen kleiner Körpertheilchen, zur Abnutzung der reibenden Körper verwendet. Eine nicht geringe Menge mechanischer Arbeit mag auch in Form elektrischer Strömungen, die wir ja in unseren Electrisir-Maschinen durch Reibung hervorrufen, verloren gehen, oder auf sonstige, uns unbekannte Weise.

Eine durchaus richtige Theorie der Zapfenreibung müßte mit allen Gesetzen in Uebereinstimmung stehen, welche bei der Vertheilung der Reibungsarbeit auf Wärme, Electricität, Abnutzungsarbeit, Erschütterungen 2c. herrschen. Bis heute beschränken sich jedoch unsere Erfahrungen fast allein auf die Abnutzung; jene übrigen Componenten der Reibungsarbeit werden zu schnell fortgeleitet, als daß sich bis jetzt am Orte ihrer Entstehung, d. h. in den einzelnen reibenden Flächen-Elementen, ihre Größe hätte beobachten lassen. Wir müssen daher, und dürfen auch uns damit begnügen, eine Theorie aufzustellen, welche mit den bei der Abnutzung gemachten Erfahrungen übereinstimmt.

Der hohe Grad von Ausbildung, welchen der praktische Maschinenbau in neuester Zeit erlangt hat, gestattet uns, über die Art der Abnutzung ganz allgemeine Annahmen zu machen, wodurch die Theorie bedeutend vereinfacht wird. Die rotirenden Massen nämlich werden bereits so gut vertheilt, resp. balancirt, daß sich die Axen der Wellen als freie Axen ansehen lassen, auf deren Zapfen nur constante Druckkräfte nach einerlei Richtung wirken*). Das Lager kann sich daher nicht unregelmäßig auslaufen, sondern nur nach der Richtung des Zapfendrucks sich abnutzen, und hierauf beruht auch der Gebrauch beweglicher Lagertheile. Bezeichnen wir also mit „Größe der Abnutzung" die Dicke der Schicht, welche in einer ganz beliebigen Zeit von den reibenden Theilen abgerieben ist, so gelangen wir zu dem wichtigen Satze:

„Die Größe der Abnutzung, in der Richtung des Zapfendrucks gemessen, ist eine und dieselbe Größe für alle Punkte des Zapfens."

Zur Erläuterung dieses Satzes bedarf es wohl kaum der Bemerkung, daß, wenn der ganze Zapfen in der Rich-

*) Nur ganz einzelne Wellen, wie die Triebwellen an Dampfmaschinen, auf welche variable Kräfte in veränderlicher Richtung wirken, machen eine Ausnahme von dieser allgemeinen Regel.

tung des Zapfendrucks sich um irgend eine Größe in das Lager einfrißt, auch jeder Punkt seiner Reibungsfläche in derselben Richtung um dieselbe Größe fortrücken muß, ganz unabhängig von seiner Lage.

Diese Voraussetzung, welche für gut construirte Wellen vortrefflich mit den Erfahrungen übereinstimmt, setzt uns also in den Stand, für jeden Punkt eines gegebenen Zapfens außer der relativen Geschwindigkeit gegen das ruhende Lager auch noch die Größe der Abnutzung in einer Richtung normal zur Reibungsfläche zu berechnen. Die Größe dieser „normalen" Abnutzung aber ist proportional demjenigen Theile der in jenem Punkte verursachten, totalen Reibungsarbeit, welcher eben zur Ueberwindung der Cohäsionskraft aufgewendet wird. Nach den bisherigen Versuchen läßt sich aber annehmen, daß, weil Material, Schmierung und Temperatur für alle Punkte der Zapfenfläche dieselben sind, jener Theil zur ganzen Reibungsarbeit in jedem Punkte dasselbe Verhältniß habe. Wie die totale Reibungsarbeit, so ist also auch die Abnutzungsarbeit dem Produkte aus dem normalen Druck in die relative Geschwindigkeit der reibenden Flächen-Elemente proportional. Wir gewinnen somit einen Satz, der uns über die Vertheilung des Zapfendrucks vollständig Aufschluß geben wird, nämlich:

„**Für einen gegebenen Zapfen ist die normale Abnutzung irgend eines reibenden Flächen-Elementes der von demselben verursachten Reibungsarbeit, und somit dem Produkte aus seiner relativen Geschwindigkeit in die Normalpressung proportional.**"

Um nun mit Hülfe der bisher aufgestellten Erfahrungssätze zu Formeln zu gelangen, nehmen wir an, es stelle m n (Fig. 13) ein Element dar von der Reibungsfläche eines beliebigen Zapfens. Seine Größe sei μ, der Normaldruck per Flächeneinheit (den wir mit Reuleaux kurzweg Flächendruck nennen wollen) $= p$, und es schließe mit der Richtung $\overline{Y\,Y}$ des Zapfendrucks den Winkel α ein. Die Projection von m n auf eine zum Zapfendruck normale Ebene ist sonach $\mu \,.\, \sin\alpha$; und zerlegen wir den normalen Druck $p \,.\, \mu$ nach der Richtung des Zapfendrucks und normal zu derselben, so finden wir die erstere Componente zu $p \,.\, \mu \,.\, \sin\alpha$. Also gelangt auf jene Projektion $\mu \,.\, \sin\alpha$ von m n derselbe Flächendruck p, welcher normal auf das Flächen-Element m n selbst wirkt. Meine obige Behauptung (pag. 235) ist somit erwiesen, daß der Flächendruck in den Reibungsflächen für alle Punkte derselbe ist, wenn nach Weisbach's Hypothese der Zapfendruck sich gleichförmig auf die zu ihm normale Projection der Reibungsfläche vertheilt.

Bestimmen wir für jedes reibende Flächenelement μ die in die Richtung des Zapfendrucks fallende Componente $p \,.\, \mu \,.\, \sin\alpha$ des Normaldrucks $p \,.\, \mu$, so muß die Summe aller dieser Componenten dem totalen Zapfendruck Q gleich sein. Wir erhalten also zur Bestimmung von p die eine Gleichung:

$$(1) \;.\;.\;.\;.\; Q = \Sigma\,(p \,.\, \mu \,.\, \sin\alpha).$$

Ist ferner ϱ die Entfernung des Elementes μ von der Drehungsaxe des Zapfens, ω die Winkelgeschwindigkeit desselben, f der Reibungs-Coefficient, so ist $\varrho\,\omega$ die Geschwindigkeit, f p die Reibung pro Flächeneinheit, und $\mu \,.\, f \,.\, p \,.\, \varrho \,.\, \omega$ die Reibungsarbeit des Elementes μ. Summiren wir für sämmtliche reibende Flächenelemente diese elementare Arbeit, so erhalten wir die gesammte Reibungsarbeit A des Zapfens zu:

$$(2) \;.\;.\;.\;.\; A = \Sigma\,(f \,.\, p \,.\, \mu \,.\, \varrho \,.\, \omega).$$

Die Ausdrücke (1) und (2) gelten, wie auch der Zapfendruck Q auf die Reibungsfläche sich vertheilen möge, also auch, wenn nach Weisbach's Annahme

$$(3) \;.\;.\;.\;.\; p = \text{Constante}.$$

Nach meinen Sätzen ist die normale Abnutzung dem Produkte aus dem Flächendruck p in die Geschwindigkeit $\varrho\,\omega$ des reibenden Elementes proportional, die in der Richtung des Zapfendrucks gemessene Abnutzung aber für alle Elemente dieselbe. Denken wir uns nun m n (Fig. 14) in der Richtung des Zapfendrucks $\overline{Y\,Y}$ um eine kleine Größe $\overline{c\,d}$ verschoben, so ist der Abstand von seiner früheren Lage $= \overline{c\,d} \,.\, \sin\alpha$, d. h. dem Sinus des Winkels α proportional, welchen m n mit Y Y einschließt. Das obige Produkt $p\,\varrho\,\omega$ muß also zu $\sin\alpha$ ein constantes Verhältniß haben, oder für eingelaufene Zapfen findet Statt

$$(4) \;.\;.\;.\;.\; \frac{p \cdot \varrho}{\sin\alpha} = \text{Const.} = C,$$

denn ω ist als constante Größe mit C zu vereinigen.

Daß aus dieser Gleichung $p = \infty$ folgt für $\varrho = 0$, wenn $\sin\alpha > 0$, daß also ihr zufolge für diejenigen Reibungsflächen eines Stützzapfens, welche in unmittelbarer Nähe der Wellenaxe liegen, der Flächendruck unendlich groß ist, spricht nicht gegen, sondern für meine Theorie. Denn nur so läßt es sich erklären, daß auch diese Elemente, deren Geschwindigkeit = Null ist, die allgemeine Abnutzung theilen.

Aus obigen 4 Gleichungen läßt sich nun für jede Zapfenform die Reibungsarbeit berechnen, sowohl nach Weisbach's Hypothese für neue, wie nach meiner für eingelaufene Zapfen. Ich habe sie gleichzeitig nach beiden Hypothesen berechnet, um den Vergleich der Formeln zu erleichtern, und zur Unterscheidung mit A_1 die Reibungsarbeit neuer, mit A_2 die von eingelaufenen Zapfen bezeichnet.

Da der Zapfendruck, falls er schief gegen die Wellenaxe gerichtet ist, sich immer in zwei Componenten zerlegen läßt, von denen die eine in der Richtung der Axe, die andere normal zu derselben wirksam ist, so habe ich nur für Stütz- und Tragzapfen die Reibungsarbeit bestimmt.

I. Berechnung der Reibungsarbeit bei Stützzapfen.

Stützzapfen nannten wir solche, in deren Axenrichtung der Zapfendruck wirksam ist. Wir denken uns die Reibungsfläche entstanden durch Umdrehung einer beliebigen Curve $f(x, y) = 0$ um die Wellenaxe, welche zugleich als ihre Y-Axe angesehen werde. Alsdann können wir in unsere obigen Formeln einsetzen (Fig. 15):

$$\varrho = x,$$

$$(5)\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{dx}{dy},$$

$$(6)\quad \mu . \sin\alpha = 2x\pi . dx,$$

und erhalten für stehende Zapfen aus der Verbindung von (1) und (2) mit (6) folgende allgemeine Formeln:

$$Q = \Sigma(p . 2x\pi . dx),$$

$$A = \Sigma\left(f\,p\,x\,\omega\,\frac{2x\pi . dx}{\sin\alpha}\right).$$

Setzen wir statt des allgemeinen Summenzeichens Σ das Integralzeichen $\int$, und nehmen wir x zwischen den Grenzen $x = r$ und $x = r_1$, so entsteht:

$$Q = 2\pi . \int_r^{r_1} p . x . dx,$$

$$A = 2f\omega\pi \int_r^{r_1} \frac{p . x^2 . dx}{\sin\alpha}.$$

Für neue Zapfen ist nach Weisbach's Hypothese der Flächendruck p constant, so daß folgt:

$$\text{I.}\quad Q = p(r_1^2 - r^2)\pi,$$

$$\text{II.}\quad A_1 = 2\omega\pi . f . p \int_r^{r_1} \frac{x^2 . dx}{\sin\alpha}.$$

Für eingelaufene Zapfen ist nach (4) zu setzen:

$\dfrac{p\,x}{\sin\alpha} = C$, und wir erhalten:

$$\text{III.}\quad Q = 2C\pi \int_r^{r_1} \sin\alpha . dx,$$

$$\text{IV.}\quad A_2 = f\omega\pi C(r_1^2 - r^2).$$

Aus diesen 4 Endgleichungen folgt für einen conischen Zapfen, da $\sin\alpha$ constant ist, (Fig. 16)

nach I und II für Weisbach's Hypothese:

$$A_1 = \frac{2}{3} f \frac{Q\omega}{\sin\alpha} . \frac{r_1^3 - r^3}{r_1^2 - r^2},$$

nach III und IV für meine Voraussetzungen:

$$A_2 = \tfrac{1}{2} f . \frac{Q\omega}{\sin\alpha} . \frac{r_1^2 - r^2}{r_1 - r} = \tfrac{1}{2} f \frac{Q\omega}{\sin\alpha}(r_1 + r).$$

Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ folgen hieraus die Arbeitsgleichungen eines ebenflächigen (Fig. 17), für $r = 0$ dagegen die eines Spitzzapfens (Fig. 18). Setzen wir $r = 0$, so entsteht:

$$A_1 = \frac{2}{3} \frac{fQr_1\omega}{\sin\alpha} \text{ und } A_2 = \tfrac{1}{2} \frac{fQr_1\omega}{\sin\alpha}.$$

Beim Einlaufen nimmt also die Reibungsarbeit eines ebenflächigen oder eines Spitzzapfens bis auf $\frac{A_2}{A_1} = \tfrac{1}{2} : \tfrac{2}{3} = \tfrac{3}{4}$, d. h. bis auf 75 Procente ihrer ursprünglichen Größe ab.

Für einen Kugelzapfen vom Radius R ist $f(x, y) = 0 = R^2 - x^2 - y^2$, also nach (5):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{x}, \text{ und}$$

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{R}.$$

Für neue Zapfen folgt sonach aus I und II:

$$A_1 = \frac{2fQR\omega}{r_1^2 - r^2} \int_r^{r_1} \frac{x^2 . dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \text{ oder}$$

$$A_1 = \frac{2fQR\omega}{r_1^2 - r^2}\left\{\frac{r}{2}\sqrt{R^2 - r^2} - \frac{r_1}{2}\sqrt{R^2 - r_1^2} + \frac{R^2}{2}\left(\arcsin\frac{r_1}{R} - \arcsin\frac{r}{R}\right)\right\}.$$

Liegt die Kugel zur Hälfte im Lager auf, so ist $r = 0$, $r_1 = R$, und

$$A_1 = \frac{\pi}{2} . fQR\omega.$$

Für eingelaufene Kugelzapfen folgt aus III und IV:

$$Q = \frac{2C\pi}{R} \int_r^{r_1} \sqrt{R^2 - x^2} . dx$$

$$Q = \frac{2C\pi}{R}\left\{\frac{R^2}{2}\left(\arcsin\frac{r_1}{R} - \arcsin\frac{r}{R}\right) + \frac{r_1}{2}\sqrt{R^2 - r_1^2} - \frac{r}{2}\sqrt{R^2 - r^2}\right\}$$

und somit:

$$A_2 = \frac{fQR\omega(r_1^2 - r^2)}{R^2\left(\arcsin\frac{r_1}{R} - \arcsin\frac{r}{R}\right) + r_1\sqrt{R^2 - r_1^2} - r\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

Für $r = 0$, $r_1 = R$ wird $A_2 = \frac{2}{\pi} . fQR\omega$.

Beim Einlaufen vermindert sich also die Reibungsarbeit eines zur Hälfte aufliegenden, kugelförmigen Stützzapfens bis zu $\frac{2}{\pi} : \frac{\pi}{2}$, also etwa um 40 Procente ihrer anfänglichen Größe!

Für die nach Schiele's Antifrictions-Curve oder Tractorie (Lagoïde) gebildeten Zapfen (s. Crelle's Journal Bd. 48 pag. 276 und Pract. Mech. Journal 1852 pag. 152) ist (s. Fig. 19):

$$f(x, y) = 0 = y - \sqrt{m^2 - x^2} + \text{m. lg. nt.} \frac{m + \sqrt{m^2 - x^2}}{x} + \text{Const.}$$

und somit:

$$\sin\alpha = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{x}{m} = \frac{dx}{ds},$$

worin m eine constante Größe. Hiernach liefert sowohl meine Hypothese (Glch. III und IV), wie die Weisbach'sche (Glch. I und II) für die Arbeit der Reibung den Werth:

$$A = f . Q . m . \omega.$$

Diese Arbeit ändert also ihre Größe nicht, trotz der Abnutzung.

Dieses Resultat findet in der Gleichung (4):

$$\frac{px}{\sin\alpha} = \text{Const.}$$

seine einfache Erklärung, indem hiernach auch für eingelaufene Zapfen der Flächendruck p constant wird, sobald $\frac{x}{\sin\alpha}$ eine constante Größe.

Bekanntlich werden die Zapfen gewöhnlich aus härterem Metall (Stahl) hergestellt, als die Lagerschalen und Pfannen (Messing), in welchen sie laufen. Ein Grund hiefür ist, daß gerade die letzteren hauptsächlich sich abnutzen sollen, und die Form und Dimensionen der Zapfen dieselben bleiben. Ein Schiele'scher Zapfen erfordert diese Sorgfalt nicht; wenn auch der Zapfen sich stärker abnutzte, als das Lager, so würde doch seine Form dieselbe bleiben. In Crelle's Journal a. a. O. wird von Druckenmüller diese Eigenthümlichkeit auf anderem Wege bewiesen. Der Erfinder des Zapfens hat bekanntlich diese Eigenschaft desselben praktisch nutzbar gemacht, indem er den drehbaren Hähnen diese Form ertheilte, und so verhütete, daß sie wie die conischen Hähne undicht wurden. Auch das Problem, an Dampfmaschinen eine Hahnsteuerung zu construiren, die durch fortwährendes Drehen nicht undicht wird, dürfte mittelst der Schiele'schen Zapfenform zu lösen sein. — Uebrigens wird man auch den Schiele'schen Zapfen natürlich gern in Gelbguß laufen lassen, weil der Reibungs-Coefficient für Eisen auf Messing sehr klein und wenig veränderlich ist.

II. Berechnung der Reibungsarbeit bei Tragzapfen.

Auch die Tragzapfen sind Rotationskörper, deren Axen aber normal stehen zum Zapfendruck. Ich beziehe sie auf die drei Coordinaten-Axen: der Z in der Richtung der Wellenaxe, der Y in der Richtung des Zapfendrucks, und der X normal zu jenen beiden Richtungen. Zwei Ebenen, welche in dem unendlich kleinen Abstande dz von einander normal zur Wellen- oder Z-Axe durch den Zapfen gelegt werden, enthalten sodann zwischen sich einen abgestumpften Kegel von der Höhe dz und dem mittleren Radius (Fig. 20):

$$(7) \ldots \varrho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

dessen conische Fläche mit der Z-Axe einen Winkel δ einschließt, bestimmt durch die Gleichung:

$$(8) \ldots \text{tang. } \delta = \frac{d\varrho}{dz} = \frac{x\,dx + y\,dy}{dz . \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Die Seite des abgestumpften Kegels ist:

$$(9) \ldots d\sigma = \frac{dz}{\cos\delta}.$$

Schließt irgend ein Bogen-Element $\overline{ab} = ds$ des Grundkreises jenes abgestumpften Kegels mit der Richtung des Zapfendrucks (der Y-Axe) den Winkel γ ein, dessen Tangente:

$$(10) \ldots tg\,\gamma = \frac{dx}{dy},$$

so ist seine Projektion auf die X-Axe $dx = ds . \sin\gamma$, und seine Länge:

$$(11) \ldots ds = \frac{dx}{\sin\gamma}.$$

Die Größe irgend eines reibenden Flächen-Elementes, welche in den Gleichungen (1) und (2) mit μ bezeichnet wurde, ist also vermöge (9) und (11):

$$(12) \ldots \mu = d\sigma . ds = \frac{dz . dx}{\cos\delta . \sin\gamma},$$

während seine Projection $\mu . \sin\alpha$ normal zur Richtung $\overline{YY}$ des Zapfendrucks ausgedrückt wird durch:

$$(13) \ldots \mu . \sin\alpha = dx . dz.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe von μ und $\sin\alpha$ entsteht aus (1) und (2), wenn wir außerdem das Summenzeichen Σ mit dem doppelten Integralzeichen vertauschen:

$$Q = \int\int p . dx . dz,$$

$$A = f\omega \int\int p . \varrho \frac{dx . dz}{\sin\gamma . \cos\delta}.$$

Für neue Zapfen ist nach Weisbach p constant zu setzen, sodaß die beiden letzten Gleichungen geschrieben werden können:

$$(14) \ldots Q = p . \int\int dx . dz,$$

$$(15) \ldots A_1 = f . p . \omega \int\int \varrho . \frac{dx}{\sin\gamma} . \frac{dz}{\cos\delta}.$$

Für eingelaufene Zapfen dagegen ist nach (4):

$$\frac{p\varrho}{\sin\alpha}=C,$$

oder, da nach (12) und (13) für unsere neuen Bezeichnungen $\sin\alpha=\cos\delta.\sin\gamma$ ist:

$$\frac{p\varrho}{\cos\delta.\sin\gamma}=C.$$

Für eingelaufene Zapfen entstehen also die Gleichungen:

$$(16)\ \ldots\ Q=C.\iint\frac{\sin\gamma.\cos\delta.dz.dx}{\varrho},$$

$$(17)\ \ldots\ A_2=f\omega C\iint dx.dz.$$

Weil nun, wie ein Blick auf Fig. 20 lehrt, x und γ sich ändern können, unabhängig von z, δ und ϱ, so lassen sich diese Endgleichungen (14) bis (17) nach x integriren zwischen den Grenzen $x=-\frac{a}{2}$ und $x=+\frac{a}{2}$. Die Sehne a, in welcher (s. Fig. 20) die Begrenzungsebene MM der reibenden Fläche den Grundkreis unseres elementaren abgestumpften Kegels schneidet, wird natürlich von z abhängig sein, also unter dem Integralzeichen stehen bleiben.

Es ist $$\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}dx=a.$$

Da ferner $x^2+y^2=\varrho^2$, also $\operatorname{tg}\gamma=\frac{dx}{dy}=-\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{\varrho^2-x^2}}{x}$,

und $\sin\gamma=\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\gamma}}=\frac{\sqrt{\varrho^2-x^2}}{\varrho}$, so folgt:

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}\frac{dx}{\sin\gamma}=\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}\varrho.\frac{dx}{\sqrt{\varrho^2-x^2}}=2\varrho.\arcsin\frac{a}{2\varrho},$$

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}\sin\gamma.dx=\frac{1}{\varrho}\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}\sqrt{\varrho^2-x^2}.dx$$

$$=\varrho.\arcsin\frac{a}{2\varrho}+\frac{a}{2\varrho}\sqrt{\varrho^2-\frac{a^2}{4}}.$$

Wir erhalten also folgende Gleichungen:

aus (14) und (15) für neue Zapfen:

$$\text{V.}\ Q=p.\int a.dz,$$

$$\text{VI.}\ A_1=2fp\omega\int\varrho^2.\arcsin\frac{a}{2\varrho}\cdot\frac{dz}{\cos\delta};$$

aus (16) und (17) für eingelaufene Zapfen:

$$\text{VII.}\ Q=C.\int\left\{\arcsin\frac{a}{2\varrho}+\frac{a}{2\varrho^2}\sqrt{\varrho^2-\frac{a^2}{4}}\right\}\cos\delta.dz.$$

$$\text{VIII.}\ A_2=f\omega C\int a.dz.$$

Für einen cylindrischen Zapfen (Fig. 21) von der Länge l und dem Radius r ist $\delta=0$, $\varrho=r$, $\int dz=l$. Nehmen wir an, daß die Begrenzungs-Ebene MM der Reibungsfläche, wie ja durchweg der Fall ist, der Wellenaxe parallel sei, so ist auch die Sehne a eine constante Größe, und es ergibt sich:

für neue Zapfen nach V und VI:

$$A_1=2fQr\omega.\frac{r}{a}.\arcsin\frac{a}{2r},$$

und wenn der Zapfen zur Hälfte aufliegt, also $a=2r$ ist:

$$A_1=\frac{\pi}{2}.fQr\omega;$$

für eingelaufene Zapfen nach VII und VIII:

$$A_2=\frac{fQa\omega}{\arcsin\frac{a}{2r}+\frac{a}{2r^2}\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}},$$

und für $a=2r$: $\quad A_2=\frac{4}{\pi}.f.Qr\omega.$

Die Reibungsarbeit eines zur Hälfte aufliegenden cylindrischen Tragzapfens nimmt hiernach ab bis auf

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{4}{\pi}:\frac{\pi}{2},$$

d. h. etwa 80 Procent ihrer ursprünglichen Größe.

Ich will noch die Reibungsarbeit des conischen und des kugelförmigen Tragzapfens berechnen, aber nur für den speciellen Fall, daß beide zur Hälfte im Lager aufliegen, also $\frac{a}{2}=\varrho$ ist. Allgemeinere Gleichungen lassen sich allerdings auch für sie entwickeln, wenn man in den Hauptgleichungen V bis VIII das a eliminirt durch Einführung des Abstandes e (Fig. 20) der Wellenaxe von der Begrenzungsebene der Reibungsfläche. Es ist nämlich $\frac{a^2}{4}=\varrho^2-e^2$ zu setzen. Allein diese Arbeitsgleichungen fallen so verwickelt aus, daß sie für meinen Zweck, nämlich zur Vergleichung der Formeln beider Theorien, Nichts taugen.

Für einen conischen Zapfen (Fig. 22) ist δ constant, und $dz=\frac{d\varrho}{\operatorname{tg}\delta}$. Ist gleichzeitig $\frac{a}{2}=\varrho$, so folgt, wenn ϱ integrirt wird zwischen den Grenzen $\varrho=r$ und $\varrho=R$:

für neue Zapfen nach V und VI:

$$A_1=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{fQ\omega}{\cos\delta}\cdot\frac{R^3-r^3}{R^2-r^2}$$

und für den conischen Stift, wenn $r=0$:

$$A_1=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{fQR\omega}{\cos\delta};$$

für eingelaufene Zapfen nach VII und VIII:

$$A_2=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{fQ\omega}{\cos\delta}(R+r)$$

und für $r=0$: $\quad A_2=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{fQR\omega}{\cos\delta}.$

Die Reibungsarbeit eines eingelaufenen conischen Tragzapfens dieser Art ist also nur $\frac{A_2}{A_1} = \frac{2}{\pi} : \frac{\pi}{3} = \frac{6}{\pi^2}$, also etwa 60 Procent von der eines neuen von gleicher Form, falls beide zur Hälfte aufliegen.

Für einen Kugelzapfen vom Radius R ist:

$$\varrho^2 + z^2 = R^2, \text{ also auch nach (8):}$$

$$tg\,\delta = \frac{d\varrho}{dz} = \frac{z}{\sqrt{R^2 - z^2}} \text{ und } \cos\delta = \frac{1}{\sqrt{1 + tz^2\delta}} = \frac{\sqrt{R^2 - z^2}}{R}.$$

Da gleichzeitig $\frac{a}{2} = \varrho = \sqrt{R^2 - z^2}$ sein soll, so folgt für neue Zapfen nach V und VI:

$$A_1 = \frac{\pi}{2} \cdot f\,Q\,R\,\omega,$$

für eingelaufene Zapfen aus VII und VIII:

$$A_2 = \frac{4}{\pi} \cdot f\,Q\,R\,\omega.$$

Wie beim cylindrischen Tragzapfen, so vermindert sich also auch hier beim Einlaufen die Reibungsarbeit bis zu $\frac{A_2}{A_1} = \frac{4}{\pi} : \frac{\pi}{2} = \frac{8}{\pi^2}$, d. h. etwa 80 Procent ihrer ursprünglichen Größe.

Uebrigens ist mir nicht entgangen, daß ein kugelförmiger Tragzapfen nicht, wie hier angenommen, mit der halben Kugelfläche aufliegen kann, weil doch irgendwo die Welle sich ansetzen muß. Die beiden letzten Formeln sind also nur für den Vergleich brauchbar.

Wir wollen jetzt die wichtigsten der obigen Resultate in einer Tabelle übersichtlich zusammenfassen. Auch hier bezeichnet Q den Zapfendruck, ω die Winkelgeschwindigkeit, f den Reibungs-Coefficienten, A_1 die Reibungsarbeit der Zapfen, so lange sie neu sind, A_2 dieselbe, wenn die Zapfen bereits eingelaufen sind, und somit $\frac{A_2}{A_1}$ das Verhältniß beider Arbeitsgrößen. Die Größe F der Reibungsfläche läßt sofort erkennen, daß die Tragzapfen und der kugelförmige Stützzapfen zur Hälfte im Lager aufliegen.

	Reibungsfläche.		Reibungsarbeit		$\frac{A_2}{A_1}$
	Form	Größe F	A_1	A_2	
Stützzapfen	eben und ringförmig, Radien r_1 und R	$(R^2 - r_1^2)\,\pi$	$\frac{2}{3} f\,Q\,\omega \frac{R^3 - r_1^3}{R^2 - r_1^2}$	$\frac{1}{2} f\,Q\,\omega\,(R + r_1)$	$\frac{3}{4} : \frac{7}{9} = 0{,}964$, wenn $r_1 = \frac{R}{2}$
	ebener Kreis, Radius r	$r^2\,\pi$	$\frac{2}{3} f\,Q\,r\,\omega$	$\frac{1}{2} f\,Q\,r\,\omega$	$\frac{1}{2} : \frac{2}{3} = 0{,}75$
	Fläche eines abgestumpften Kegels, Radien r_1 und R; $r_1 < R$	$\frac{(R^2 - r_1^2)\,\pi}{\sin\alpha}$	$\frac{2}{3}\frac{f\,Q\,\omega}{\sin\alpha} \cdot \frac{R^3 - r_1^3}{R^2 - r_1^2}$	$\frac{1}{2}\frac{f\,Q\,\omega}{\sin\alpha}(R + r_1)$	$\frac{3}{4} : \frac{7}{9} = 0{,}964$, wenn $r_1 = \frac{R}{2}$
	conische Fläche, Radius R, Winkel an der Spitze 2α	$\frac{R^2\,\pi}{\sin\alpha}$	$\frac{2}{3}\frac{f\,Q\,R\,\omega}{\sin\alpha}$	$\frac{1}{2}\frac{f\,Q\,R\,\omega}{\sin\alpha}$	$\frac{1}{2} : \frac{2}{3} = 0{,}75$
	Schiele's Zapfen, $m = Const.$	$m^2\,\pi$	$f\,Q\,m\,\omega$	$f\,Q\,m\,\omega$	$1 : 1 = 1{,}00$
	Kugelzapfen, Radius R	$2 . R^2\,\pi$	$\frac{\pi}{2} f\,Q\,R\,\omega$	$\frac{2}{\pi} f\,Q\,R\,\omega$	$\frac{2}{\pi} : \frac{\pi}{2} = 0{,}405$
Tragzapfen	cylindrisch; Radius R, Länge $= \frac{8}{3} R$	$\frac{8}{3} R^2\,\pi$	$\frac{\pi}{2} f\,Q\,R\,\omega$	$\frac{4}{\pi} f\,Q\,R\,\omega$	$\frac{4}{\pi} : \frac{\pi}{2} = 0{,}81$
	kugelförmig, Radius R	$2\,R^2\,\pi$	$\frac{\pi}{2} f\,Q\,R\,\omega$	$\frac{4}{\pi} f\,Q\,R\,\omega$	$\frac{4}{\pi} : \frac{\pi}{2} = 0{,}81$
	conisch, Radius R Winkel an der Spitze $= 2\alpha$	$\frac{R^2\,\pi}{2 . \sin\alpha}$	$\frac{\pi}{3}\frac{f\,Q\,R\,\omega}{\cos\alpha}$	$\frac{2}{\pi}\frac{f\,Q\,R\,\omega}{\cos\alpha}$	$\frac{2}{\pi} : \frac{\pi}{3} = 0{,}607$

Wie aus dieser Tabelle ersichtlich, stehen die Formeln für eingelaufene Zapfen denjenigen für neue Zapfen an Einfachheit und Brauchbarkeit keineswegs nach. Vielmehr ist für einen sehr gebräuchlichen Zapfen, den ebenflächigen Stützzapfen mit ringförmiger Reibungsfläche*), die Reibungs-

*) Für Constructeure ist beachtenswerth, daß ebene Stützzapfen mit der beliebten ringförmigen Reibungsfläche mehr Arbeit verursachen, als diejenigen mit kreisförmiger Reibungsfläche von gleichem Durchmesser.

arbeit weit bequemer nach meiner, als nach Weisbach's Theorie zu berechnen. Diese Thatsache ist um so erfreulicher, da, wie schon oben bemerkt, neue Zapfen zu den Seltenheiten gehören, also auch die Formeln für eingelaufene Zapfen häufiger Anwendung finden mögen, als die für neue.

Das Verhältniß $\frac{A_2}{A_1}$ der Reibungsarbeiten nimmt auffallend verschiedene Werthe an für die verschiedenen Zapfenformen. Es variirt von 0,405 beim kugelförmigen Stützzapfen bis 0,964 beim Stützzapfen mit ebener ringförmiger Reibungsfläche, und 1 bei Schiele's Zapfen. Nicht uninteressant ist das Resultat, daß an Transmissionen mit den üblichen cylindrischen Zapfen beim Einlaufen die passiven Widerstände sich um etwa 20 Procente vermindern, und bei stehenden Wellen mit ebenflächigen Zapfen sogar um 25 Procent. — Die numerischen Werthe für $\frac{A_2}{A_1}$ können leicht zur Prüfung der Theorien benutzt werden.

In der Praxis kommt es manchmal darauf an, Zapfen zu construiren, die bei gegebener Stärke (gegebenem Radius) ein Minimum von Reibungsarbeit verursachen. Lange glaubte man, daß Schiele's Zapfen diese Bedingung erfülle. Unsere Tabelle lehrt, indem wir die Radien $R = m = r$ setzen, daß unter den Stützzapfen derjenige mit ebener, kreisförmiger Reibungsfläche, unter den Tragzapfen aber der conische jener Forderung genüge. Der Schiele'sche Zapfen verursacht bei gegebenem Durchmesser am meisten Reibung von allen Stützzapfen; denn wenn er auch einem neuen kugelförmigen oder conischen Zapfen vorzuziehen ist, so verliert er doch schnell diesen Vorzug, sobald jene sich einlaufen. — Unter den Tragzapfen ist der conische trotz seiner geringen Reibung dem cylindrischen nachzusetzen; denn nicht nur kann er seiner Natur nach immer nur am Ende der Wellen angebracht werden, sondern wegen der Neigung seiner Reibungsfläche gibt er auch der Welle das Bestreben, aus dem Lager heraus zu rutschen. Er wird daher bekanntlich fast allein bei den Reitnageln der Drehbänke angewendet, und tritt auch dort mehr als Stützzapfen auf, denn als Tragzapfen.

Bei der Berechnung der Reibungsfläche des cylindrischen Tragzapfens nahm ich die Länge desselben $= \frac{4}{3}$ des Durchmessers, einen sehr gebräuchlichen Mittelwerth. Uebrigens verdient bemerkt zu werden, daß von dieser Länge die Reibungsarbeit durchaus nicht, oder doch nur in sofern abhängt, als die Dicke sich ein wenig mit der Länge ändert. Dieser Umstand ist sehr wichtig, denn je größer die Reibungsfläche, welche eine gegebene Reibungsarbeit verursacht, desto geringer ist die Abnutzung und Erwärmung des Zapfens*).

*) Mit Recht werden daher die Zapfen der Eisenbahnwagen sehr lang construirt.

Von allen übrigen in der Tabelle aufgeführten Zapfen ist nur einer, nämlich der Schiele'sche Stützzapfen, in beschränktem Maße dieses Vorzugs theilhaftig. Denn die Reibungsarbeit dieses Zapfens ist allein abhängig von der Constanten m der Tractorie, und wie groß das Stück dieser Curve ist, welches die Reibungsfläche beschreibt, ist gleichgültig für die Größe jener Arbeit.

Allein die Vergrößerung der Reibungsfläche hat bei Schiele's Zapfen ihre Grenzen. Aus der oben (pag. 243) aufgestellten Differential-Gleichung der Tractorie:

$$\sin \alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{x}{m}$$

findet sich leicht das Differential dieser Reibungsfläche zu:

$$dF = 2\,x\,\pi\,.\,ds = 2\,m\,\pi\,.\,dx.$$

Als untere Grenze für x ist bei der Integration offenbar 0 zu setzen, als obere aber m, weil (pag. 243) für $x > m$ die Ordinate y imaginair wird. Für das Maximum der Reibungsfläche F entsteht also:

$$F_{max.} = \int_0^m 2\,m\,\pi\,.\,dx = 2\,m^2\,\pi.$$

Für $x = 0$ erhalten wir jedoch einen unendlich langen Zapfen laut der Gleichung der Tractorie. Wir müssen daher auf dieses, keineswegs sehr große, Maximum von F verzichten. Setzen wir als untere Grenze $x = \frac{m}{2}$, sodaß der Winkel α, den die Tangente am letzten Curven-Elemente mit der Wellenaxe einschließt, $\alpha = 30^0$ wird, so werden dennoch die Schwierigkeiten zur Herstellung des Zapfens schwer genug zu überwinden sein. Für die Grenzen $x = m$ und und $x = \frac{m}{2}$ aber entsteht:

$$F = \int_{\frac{m}{2}}^m 2\,m\,\pi\,.\,dx = 2\,m\,\pi\left(m - \frac{m}{2}\right) = m^2\,\pi,$$

und dieses ist der Werth, den ich in obige Tabelle eingeführt habe.

Wir haben vorhin die Arbeiten der verschiedenen Zapfen unter der Voraussetzung mit einander verglichen, daß sie alle den gleichen Durchmesser, dieselbe Stärke besitzen. Sehr häufig jedoch muß man den Durchmesser des Zapfens weit stärker machen, als die auf ihn wirkenden Kräfte erfordern, weil sonst die Reibungsfläche zu klein, Abnutzung und Erwärmung aber zu bedeutend werden. Unter solchen Umständen verdient aber offenbar derjenige Zapfen den Vorzug, welcher bei gegebener Reibungsfläche ein Minimum von Arbeit verursacht. Setzen wir in der letzten Tabelle die Reibungsflächen F einander gleich, und drücken überall R und m durch den Radius r des ebenflächigen Stützzapfens aus, so entsteht aus der obigen die folgende Tabelle, welche also wieder zum Vergleich der Güte jener Zapfenformen dient.

	Form	Reibungsfläche F	Radius	$\frac{A_1}{f Q r \omega}$	$\frac{A_2}{f Q r \omega}$
Stützzapfen	ebenflächiger Zapfen, Grundkreis-Radius r	$r^2 \pi$	r	$\frac{2}{3} = 0{,}667$	$\frac{1}{2} = 0{,}500$
	Zapfen mit ebener, ringförm. Fläche. Radien $\frac{R}{2}$ und R	$r^2 \pi = \frac{3}{4} R^2 \pi$	$R = r \sqrt{\frac{4}{3}}$	$\frac{7}{9} \sqrt{\frac{4}{3}} = 0{,}898$	$\frac{3}{4} \sqrt{\frac{4}{3}} = 0{,}866$
	conischer Zapfen Winkel an der Spitze = 2 α	$r^2 \pi = \frac{R^2 \pi}{\sin \alpha}$	$R = r . \sqrt{\sin \alpha}$	$\frac{2}{3 \sqrt{\sin \alpha}} = \frac{0{,}667}{\sqrt{\sin \alpha}}$	$\frac{1}{2 \sqrt{\sin \alpha}} = \frac{0{,}500}{\sqrt{\sin \alpha}}$
	Schiele's Zapfen, m = Const.	$r^2 \pi = m^2 \pi$	$m = r$	$1 = 1{,}000$	$1 = 1{,}000$
	Kugelzapfen	$r^2 \pi = 2 R^2 \pi$	$R = \frac{r}{\sqrt{2}}$	$\frac{\pi}{\sqrt{8}} = 1{,}111$	$\frac{\sqrt{2}}{\pi} = 0{,}450$
Tragzapfen	cylindrischer Zapfen, Länge $\frac{8}{3}$ R, Radius R	$r^2 \pi = \frac{8}{3} R^2 \pi$	$R = \frac{r}{4} \sqrt{6}$	$\frac{\pi}{8} \sqrt{6} = 0{,}962$	$\frac{\sqrt{6}}{\pi} = 0{,}779$
	Kugelzapfen	$r^2 \pi = 2 R^2 \pi$	$R = \frac{r}{\sqrt{2}}$	$\frac{\pi}{\sqrt{8}} = 1{,}111$	$\frac{\sqrt{8}}{\pi} = 0{,}900$
	conischer Zapfen Winkel an der Spitze = 2 α	$r^2 \pi = \frac{R^2 \pi}{2 \sin \alpha}$	$R = r \sqrt{2 \sin \alpha}$	$\frac{\pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{2 \sin \alpha}}{\cos \alpha} = 1{,}2825 \frac{\sqrt{\sin \alpha}}{\cos \alpha}$	$\frac{\sqrt{8}}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{\sin \alpha}}{\cos \alpha} = 0{,}900 \frac{\sqrt{\sin \alpha}}{\cos \alpha}$

Bisher wurde es für einen Vorzug des ebenflächigen Stützzapfens gehalten, daß er bei gegebener Reibungsfläche weniger Arbeit verursache, als jeder andere Stützzapfen. Allein die Tabelle zeigt, daß der eingelaufene Kugelzapfen ihn noch um ein Weniges an Güte übertrifft, während er neu freilich fast doppelt so viel Reibungsarbeit verursacht, als der ebenflächige. Natürlich wird dieser Vorzug des Kugelzapfens bei Weitem aufgewogen durch die Leichtigkeit, mit welcher der ebenflächige Zapfen und sein Lager hergestellt werden können, und durch die Eigenschaft, welche der ebenflächige mit Schiele's Zapfen gemein hat, daß nämlich durch die Abnutzung die Form der Reibungsfläche nicht verändert wird.

Unter den Stützzapfen verursacht der Schiele'sche bei gegebener Reibungsfläche die größte Reibungsarbeit. In der Reihe der neuen Zapfen steht ihm allerdings der Kugelzapfen nach, allein es ist wohl selbstverständlich, daß es für den Vergleich weniger auf das Verhalten der neuen, als der eingelaufenen Zapfen ankommt.

Unter den Tragzapfen verursucht der cylindrische bei gegebener Reibungsfläche stets am wenigsten Arbeit, wenn, wie hier überall stillschweigend angenommen wurde, Zapfendruck Q und Winkelgeschwindigkeit ω für alle Zapfen dieselben sind.

Nachdem wir jetzt sowohl für neue, als für eingelaufene Zapfen die wichtigeren Resultate gewonnen haben mit Hülfe unserer Hypothesen, wollen wir über diese letzteren noch einige Worte hinzufügen. Sowohl Weisbach's Hypothese über die gleichförmige Vertheilung des Zapfendrucks, wie die meine, „daß die normale Abnutzung an jedem Punkte der daselbst verzehrten Reibungsarbeit proportional sei", haben ihre schwachen Seiten, und es kann der Wissenschaft nur förderlich sein, wenn wir darauf aufmerksam machen. Aus meiner Hypothese folgt nämlich die möglicher Weise falsche Annahme, daß auch die Differenz der gesammten Reibungsarbeit und der Abnutzungsarbeit, d. h. der in Wärme, Elektricität, Erschütterungen u. s. w. übergehende Theil der Reibungsarbeit dieser letzteren proportional sei. Ob aber z. B. die Wärme-Entwickelung ebenso wie die Reibungsarbeit nur im einfachen Verhältniß wächst mit der relativen Geschwindigkeit und dem normalen Drucke der reibenden Flächentheile, haben meines Wissens die Versuche noch nicht entschieden; ob an zwei congruenten Zapfen, deren einer großen Zapfendruck und geringe Geschwindigkeit, der andere aber kleinen Zapfendruck und große Winkelgeschwindigkeit besitzt, die Erschütterungen stets gleich stark sind, sobald nur das Product aus Druck in Winkelgeschwindigkeit dasselbe ist, ist jedenfalls sehr fraglich. Meine Theorie eingelaufener Zapfen darf jedoch so lange als richtig angesehen werden, als nicht neue Naturgesetze entdeckt sind, denen sie widerspricht; mit den bis jetzt bekannten steht sie im Einklang.

Anders verhält es sich mit der Theorie neuer Zapfen, welche mir überhaupt weit schwieriger erscheint, als die der eingelaufenen. Dort kommen nämlich die Gesetze der Elasticität in Frage, und vornehmlich das folgende:

„Ein auf rückwirkende Festigkeit in Anspruch genom-
„mener Stab erleidet eine Verkürzung, welche dem auf
„ihn einwirkenden Drucke proportional ist."

Denken wir uns nun einen unelastischen krummflächigen Körper, etwa (Fig. 23) die nebehskizzirte Kugel vom Mittelpunkte a, in ein elastisches kugelförmiges Lager von gleichem Durchmesser gelegt, und dann durch die Kraft Q in dasselbe hineingedrückt um die Größe $\overline{a a_1}$, so zeigt schon ein Blick auf die Figur, daß die Verkürzung der Lagertheile in radialer Richtung verschieden ist. Bei m z. B., dessen Radius $\overline{m a_1}$ mit dem Drucke Q den Winkel $(90^0 - \alpha)$ einschließt, tritt in radialer Richtung die Verkürzung ein:

$$\overline{a a_1} \,.\, \sin \alpha.$$

Könnte man das Lager herstellen aus dünnen radialen Stäbchen von gleicher Länge, die unter einander nicht zusammenhängen, und deren nach außen gerichtete Enden unveränderlich fest liegen, so würde offenbar nach obigem Gesetze der Elasticität der Normaldruck in jedem Flächenelement m dem Sinus des Winkels α proportional sein, welchen es mit der Richtung des Zapfendrucks Q einschließt. Nun ist jedoch in unseren massiven Lagern die Verkürzung irgend eines jener ideellen Stäbchen nicht möglich ohne Einwirkung auf alle benachbarten Theile, auch ist die äußere Begrenzung des Lagers nicht unveränderlich fest; der Normaldruck wird also auch von der Form des Lagers und dem Elasticitätsmodulus des Materials abhängen. Allein so viel ist aus unserer Betrachtung wohl ersichtlich, daß der Normaldruck von der Lage der Punkte nicht ganz unabhängig, also auch nicht für alle Punkte derselbe sein kann. Die Hypothese von der gleichförmigen Vertheilung des Zapfendruckes ist also für krummflächige Zapfen nicht ganz richtig, denn der Einfluß des Winkels α wird nicht vermindert, wenn wir auch den Zapfen (im Beispiel die Kugel) als elastisch ansehen. — Wenn daher die Versuche ergeben sollten, daß die Reibungsarbeit eines neuen Zapfens beim Einlaufen um einen kleineren Theil abnehme, als unsere Rechnungen ergeben haben, so wird der Grund hievon zunächst in der Unrichtigkeit dieser Hypothese zu suchen sein.

Aus den letzten Betrachtungen lassen sich für Zapfenreibungs-Versuche einige, vielleicht nicht unwichtige Regeln entnehmen. Zunächst wird es räthlicher sein, eingelaufene als neue Zapfen zu benutzen, weil bei den ersteren die Reibungsarbeit von der äußeren Form des Lagers und dem Elasticitäts-Modulus des Materials nicht abhängt. Da sich ferner eingelaufene Zapfen gegen eine Vergrößerung des Zapfendrucks ähnlich verhalten, wie neue gegen den Totaldruck, so dürfen an demselben Zapfen nicht Versuche angestellt werden mit verschiedenen Zapfendrücken, ohne daß er bei jedem derselben gehörig eingelaufen ist (wozu freilich viel Zeit erforderlich). Die letzte Regel ist besonders wichtig, da z. B. beim kugelförmigen Stützzapfen durch das Einlaufen die Reibungsarbeit um mehr als die Hälfte abnimmt zufolge unseren Rechnungen.

Endlich noch einige Bemerkungen über den Reibungs-Coefficienten f. Wir gingen oben (pag. 237) von dem allgemein als richtig betrachteten Grundsatz aus, „daß unter normalen Verhältnissen die Reibung von zwei sich ebenflächig berührenden Körpern dem gegenseitigen senkrechten Drucke ihrer Berührungsflächen proportional sei". Wir nahmen also an, daß f von der Größe jenes senkrechten Druckes nicht abhängig sei. Nun zeigen aber die Versuche von Rennie (Phil. Transactions 1829, table 8, pag. 159), welche auch Moseley in seinen Mech. Principles of Engineering and Architecture 1855, pag. 159 aufgenommen hat, daß der Reibungs-Coefficient bei gegebener Reibungsfläche mit jenem Drucke sich vergrößert, also eine Funktion des Flächendruckes p ist. Wenn a eine Constante, so ist allgemein:

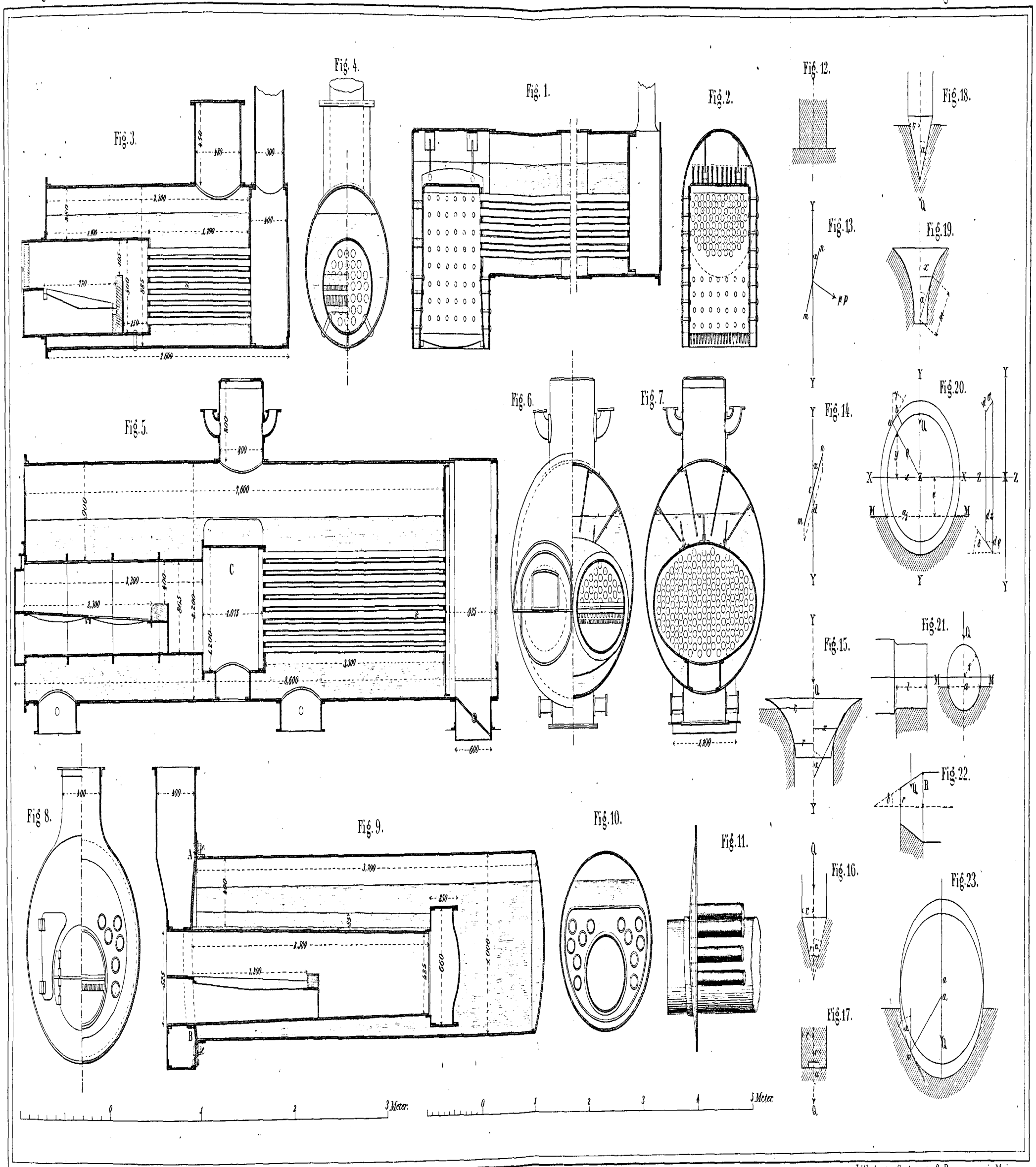
$$f = a + F(p),$$

worin F (p) eine Funktion des Flächendruckes p bedeutet.

Diese Abhängigkeit des f von p rührt wahrscheinlich daher, daß ein Theil der Schmiere zwischen den Reibungsflächen herausgepreßt wird, wenn der Flächendruck zunimmt.

Man sieht, daß sich unsere Formeln unter Annahme eines veränderlichen Reibungs-Coefficienten noch etwas modificiren würden, und daß die Reibungsarbeit sich nicht genau im einfachen Verhältniß mit dem Zapfendruck Q ändert. Glücklicher Weise ist der Reibungs-Coefficient für Eisen auf Messing, diese bei der Zapfenreibung am häufigsten vorkommenden Metalle, nicht nur vortheilhaft klein, sondern auch nahe constant, sodaß meistens von jener Veränderlichkeit des f abgesehen werden kann.

Zürich, den 8. November 1859.



Verlag v. J.G. Engelhardt (B.Thierbach) in Freiberg.
Lith. Anst v. Steinmetz & Bornemann in Meissen.